问题：1) 如何找二次型的标准形？
2) 如何找二次型的正则标准形.

配方法求二次型的标准形.

例：$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_1x_2+x_3^2=2(x_1+\frac{1}{4}x_2)^2-\frac{1}{8}x_2^2+x_3^2$

$\Rightarrow \tilde{Q}(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-\frac{1}{8}y_2^2+y_3^2$

全为交叉项

例 $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$

$\overset{\text{变元替换}}{=} 2(y_1+y_2)(y_1-y_2)-6(y_1-y_2)y_3+2(y_1+y_2)y_3$

$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$

$\overset{\text{配方}}{=} 2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$

$=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$

定理：任意二次型可由配方法化为标准形.

证明：1° $a_{11}\neq 0$

2° $a_{11}=0$ $a_{ii}\neq 0$ for some i

3° $a_{ii}=0$ $\forall i$. $a_{ij}\neq 0$ for some $i\neq j$.

初等变换法求二次型的标准形.

定理：任意实对称矩阵 A，都存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_r$ 使得

$$P_r^T P_{r-1}^T \cdots P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_r = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

证明：任可逆证可表示为一系列初等方阵的乘积 □.

具体步骤：

1° $a_{11} \neq 0$. 第1列的 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 列
第1行的 $-a_{1i}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 行

$$\Rightarrow \exists \text{ 可逆阵 } P_1 \text{ s.t. } P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

2° $a_{11} = 0$，$\exists i$ s.t. $a_{ii} \neq 0$.

交换第1行与第 i 行
交换第1列与第 i 列

$$\Rightarrow A' = S_{1i}^T A S_{i1} = \begin{pmatrix} a_{ii} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

然后进行步骤 1°. $\Rightarrow \exists$ 可逆阵 P_1 s.t.

$$P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} a_{ii} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

3° $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$. 且 $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

4° $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$，且 $\exists i = 2, \cdots, n$ s.t. $a_{1i} = a_{i1} \neq 0$.

$$A' = T_{1i}(1) A T_{1i}(1)^T = \begin{pmatrix} 2a_{1i} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

对 A' 进行步骤 1° $\Rightarrow \exists$ 可逆阵 P_1 s.t.

$$P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} 2a_{1i} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

递归下去 ...

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对I作初等列变换}]{\text{对A作成对的行列初等变换}} \begin{pmatrix} P^TAP \\ P \end{pmatrix}$$

类似的 $$(A, I) \xrightarrow[\text{对I作初等行变换}]{\text{对A作成对的行列初等变换}} (P^TAP,\ P^T)$$

例: 化简 $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

解: $$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2c_1 \to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

成对

对称

$$\xrightarrow{c_2 \to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \tilde{Q}(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2 \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例: $Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$

解: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A, I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对称!

$$\xrightarrow{r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-c_1 \to c_3]{-\frac{1}{2}c_1 \to c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-c_1 \to c_3]{-\frac{1}{2}c_1 \to c_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2r_1 \to r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2c_1 \to c_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 正定二次型

$A^T = A$

定义：1) n 元实二次型 $Q(x_1,\cdots,x_n) = \sum a_{ij}x_ix_j = x^TAx$ 称为
正定二次型，如果 $\forall x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，$Q(x_1,\cdots,x_n) > 0$.

定理： Q 正定 $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ Q 的(或 A 的)正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow$ A 正定.

$\Leftrightarrow$ A 相合于单位矩阵.

证：① 设 r, s 分别为 Q 的正负惯性指数，则 $\exists$ 可逆阵 P s.t.

$$Q(x_1\cdots x_n)\Big|_{x=Py} = y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2$$

1° 假若 $r<n$，则 $x = P\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \neq 0$ 满足

$$Q(x_1\cdots x_n)\Big|_{x=P\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}} = 0^2+\cdots+0^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2 \leq 0 \ \ \text{↯}$$

2° 反之，若 $r=n$. 则 $\forall x\neq 0 \Rightarrow y=P^{-1}x\neq 0 \Rightarrow Q(x_1,\cdots x_n) = y_1^2+\cdots+y_n^2>0$.

如何判断一个二次型是否为正定的？